



# COMPUTER- ALGEBRA-SYSTEME

# I. Leitgedanken zum Kompetenzerwerb

Die technische Entwicklung der informationsverarbeitenden Systeme erlaubt es, komplexe Computer-Algebra-Systeme (CAS) im Unterricht einzusetzen. Sie ergänzen die Möglichkeiten des Mathematikunterrichts auf neue revolutionäre Weise und eröffnen eine neue didaktisch-methodische Dimension indem, in Ergänzung zum Mathematikunterricht, neue Inhalte bearbeitet und neue Arbeitsformen angewandt werden können. Sie werden eingesetzt, um die Unterrichts- und Bildungsziele leichter, effizienter und dauerhafter zu erreichen. Die Unterrichtsmethodik sollte sich nicht an dem Werkzeug orientieren, sondern an den angestrebten Qualifikationen.

Computer-Algebra-Systeme sind vielseitige Werkzeuge, die einerseits leicht durchschaubare, aber rechenintensive Termumformungen übernehmen, andererseits durch ihre Visualisierungsmöglichkeiten auf effektive Weise die Begriffsbildung unterstützen.

Damit können sie den Mathematikunterricht von vielen Routineaufgaben befreien. Im gegenwärtigen Mathematikunterricht spielen Rechentechniken eine große Rolle.

Dies erschwert den Schülerinnen und Schülern mitunter den Blick auf wesentliche Inhalte.

Darüber hinaus können Computer-Algebra-Systeme Denkprozesse initialisieren und zu einem entscheidenden Instrument zur Aktivierung der Schüler werden. Sie wirken somit als kognitive Werkzeuge und kognitive Medien. Dabei steht nicht im Vordergrund, dass mit ihrer Hilfe vieles schneller und sicherer ausführbar ist. Vielmehr von Bedeutung ist die Akzentverschiebung weg vom Ausführen, hin zum Planen und Reflektieren. Mit Hilfe von CAS lässt sich das Erkennen von Problemen, das Formulieren von Fragen, das Finden von Lösungsansätzen, das Verstehen von Algorithmen, das Interpretieren von Ergebnissen und das Begründen ihrer Richtigkeit beziehungsweise Brauchbarkeit leichter ins Zentrum des Unterrichts rücken. Dies sind gerade Anforderungen, die an allgemein bildenden Mathematikunterricht gestellt werden müssen.

Der jeweilige Kalkül und seine Durchführung tritt mehr in den Hintergrund und Ideen und Grundvorstellungen treten hervor. Die Beziehung zwischen Mathematik und Realität wird deutlich. Interessante Anwendungen und deren Modellierung vermindert die fachspezifische Einengung und fördert das Denken in vernetzten Systemen. Die Grafik und damit die Visualisierungsmöglichkeiten spielen eine bedeutende Rolle bei der Heuristik und experimentellen Mathematik.

Neben der Ausbildung und Vertiefung fachlicher Kompetenzen bietet das Computer-Algebra-System beziehungsweise andere geeignete Werkzeuge wie zum Beispiel der Taschenrechner, eine Tabellenkalkulation oder ein Geometrieprogramm die Möglichkeit, Schülerinnen und Schüler zu eigenständiger Arbeit anzuleiten und sie darüber kommunizieren zu lassen. So sollen Schülerinnen und Schüler lernen, eigene Beobachtungen zu machen, selbstständig Fragen zu stellen, eigene Lösungswege zu suchen, zu entdecken, zu beschreiben, zu erklären und zu begründen. Solche überfachliche Kompetenzen wie zum Beispiel die Fähigkeit zur Teamarbeit, die Selbstständigkeit beim Erarbeiten neuer Inhalte, die Kreativität bei der Konstruktion von Modellen und Lösungsansätzen, das Planen und gezielte Durchführen des Problemlösungsprozesses sind durch geeignete Arbeits- und Sozialformen zu fördern.



CAS: Computer-Algebra-Systeme

Damit wird die Entwicklung von Schlüsselqualifikation wie das Denken in Zusammenhängen, das Problemlösevermögen, die Teamfähigkeit, Kommunikationsbereitschaft, Argumentationsfähigkeit, Selbstständigkeit und Kreativität unterstützt.

Das fachliche Ziel ist es realitätsnahe Probleme mathematisch geeignet zu modellieren und Konsequenzen aus diesen Modellen zu ziehen. Dazu ist es notwendig, einerseits die Möglichkeiten des eingesetzten Werkzeuges zu kennen und anwenden zu können. Andererseits muss man auch geeignete mathematische Verfahren und ihre Einsatzmöglichkeiten kennen.

Die fachlichen Kompetenzen und Inhalte sind somit in drei Gruppen „Integration des Werkzeuges“, „Bearbeiten mathematischer Themenkreise“ und „Modellierung realitätsnaher Probleme“ organisiert. Die Vermittlung der Funktionalität des Werkzeuges ergibt sich aus den jeweiligen Bedürfnissen, sie wird nicht zum Selbstzweck erhoben. Ebenso erschließen sich neue mathematische Inhalte aus problemangemessenen Situationen und nicht ausschließlich als vertiefte Behandlung eines Fachgebiets.

Durch die Möglichkeit, experimentell zu arbeiten, werden die Schülerinnen und Schüler mehr als im traditionellen Unterricht zu selbstständigem Arbeiten und Denken angehalten. Dazu muss man ihnen mehr Selbstverantwortung einräumen. Es eignen sich dazu Unterrichtsformen, die den Schülerinnen und Schülern größere Freiräume bieten und von ihnen eigene Entscheidungen verlangen wie projektorientierter Unterricht, fächerverbindender Unterricht, schülerzentrierter Unterricht, kreatives Experimentieren, offene Fragestellungen, Projektaufgaben, Gruppenarbeit und Freiarbeit. Um dabei mathematische Begriffe, Verfahren und Inhalte zu erschließen, können die Schülerinnen und Schüler Vermutungen aufstellen, die zu gezielten Experimenten Anlass geben, Fragen stellen und Antworten suchen, argumentieren und begründen, hinterfragen und abgrenzen.

Das Aufstellen von Lösungsformeln und das Interpretieren von Lösungen muss eine stärkere Gewichtung im Unterricht bekommen. Die Schülerinnen und Schüler lernen das Lösen von Problemen und das Argumentieren. Der Einsatz von Computer-Algebra-Systemen im Unterricht ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern, selbstständig mathematische Inhalte zu erforschen. Durch Computer-Algebra-Systeme ist eine schnelle Kontrollmöglichkeit von Lösungen gegeben. Der zügige Wechsel zwischen numerischen, symbolischen und grafischen Repräsentationsformen ermöglicht den Schülerinnen und Schülern eine eigene Ideenfindung. Sie bekommen durch verstärktes eigenes Tun bei der Erarbeitung von mathematischen Sachverhalten ein tieferes Verständnis für die mathematischen Strukturen.

Dabei ist aber das Hand- und Kopfrechnen nicht vollständig zu vernachlässigen.

Um die Fähigkeiten eines Computer-Algebra-Systems kennen zu lernen, bearbeiten die Schüler zunächst bekannte mathematische Probleme aus dem Unterricht mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems. Es werden weitere mathematische Themenkreise erarbeitet, die zum Beispiel vorteilhaft sind, um realitätsnahe Probleme zu mathematisieren. Bei der Modellierung realitätsnaher Probleme beginnen die Schülerinnen und Schüler mit einfachen Modellen, die sich auf schon bekannte Inhalte anderer Fächer beziehen, wie zum Beispiel Bewegungen in der Physik oder Wachstumsverhalten in der Biologie. Die Komplexität der Modelle wird kontinuierlich gesteigert.

Die Schülerinnen und Schüler dokumentieren ausführlich ihre Vorgehensweise, so dass jeder Schritt des Problemlösungsprozesses deutlich sichtbar wird. Hier sind sowohl kooperative als auch selbstständige und selbstgesteuerte Arbeitsweisen angebracht.

Ergänzend werden auch spezifische Eigenschaften des eingesetzten CAS-Systems angewandt, wie zum Beispiel Programmierbarkeit, Vernetzung oder zugehörige Ergänzungspakete.

## II. Kompetenzen und Inhalte

### KURSSTUFE

#### 1. INTEGRATION DES WERKZEUGES

Die Schülerinnen und Schüler

- machen sich mit den Eigenschaften und der Bedienung des verwendeten Systems vertraut;
- kennen grundlegende Befehle des eingesetzten Werkzeuges;
- können mit dem eingesetzten Werkzeug Terme umformen;
- können mit dem eingesetzten Werkzeug Gleichungen lösen;
- können mit dem eingesetzten Werkzeug Schaubilder von Funktionen zeichnen;
- können mit dem eingesetzten Werkzeug Funktionen ableiten und integrieren;
- können mit dem eingesetzten Werkzeug Grenzwerte bestimmen;
- wenden die Werkzeuge auf bekannte mathematische Probleme an;
- erstellen Protokolle ihrer Tätigkeit;
- variieren die Aufgabenstellungen.

#### 2. BEARBEITEN MATHEMATISCHER THEMENKREISE

Die Schülerinnen und Schüler

- erarbeiten selbstständig neue mathematische Inhalte;
- arbeiten die grundlegenden Methoden des mathematischen Gebietes heraus;
- setzen diese Methoden mit dem verwendeten Werkzeug um;
- wenden diese Methoden auf typische Aufgabenstellungen aus dem mathematischen Gebiet an;
- erkennen in realitätsnahen Aufgabenstellungen die Möglichkeit der Anwendung der erarbeiteten Methoden;
- können einfache Differenzialgleichungen und Differenzialgleichungssysteme aufstellen und lösen;
- können Richtungsfelder und Phasendiagramme erstellen und interpretieren;

- kennen das Euler-Cauchy-Verfahren und können es anwenden;
- können dynamische Vorgänge modellieren;
- können die Krümmung und Bogenlänge von Kurven bestimmen;
- kennen die Parameterdarstellung von Kurven und können sie verwenden;
- können Flächen im dreidimensionalen Raum darstellen und grundlegende Methoden der Analysis auf sie anwenden;
- können Kurven durch Polynome und Splines approximieren;
- kennen die Taylorapproximation und können sie anwenden;
- kennen Verfahren zur numerischen Bestimmung von Nullstellen und numerischen Integration und können sie anwenden.

#### 3. MODELLIERUNG REALITÄTSNAHER PROBLEME

Die Schülerinnen und Schüler

- können Probleme in gegebenen Situationen erkennen und formulieren;
- kennen die Stufen des Problemlösungsprozesses:
  - Problembeschreibung;
  - Mathematische Modellierung;
  - Durchführung der Modellrechnung;
  - Interpretation des Ergebnisses;
  - Validierung des Ergebnisses;
  - Modellkritik;
- planen die Vorgehensweise zur Problemlösung;
- kennen heuristische Strategien und wenden sie zur Lösung von Problemen an (zum Beispiel Generalisieren, Spezialisieren, Abstrahieren, Konkretisieren, Klassifizieren, Analogisieren);
- wenden geeignete mathematische Methoden im Rahmen des Problemlösungsprozesses auf realitätsnahe Probleme an;
- verwenden die passenden Werkzeuge;
- können Schaubilder interpretieren;
- führen verschiedene Lösungsansätze durch und bewerten die Vorgehensweise;
- dokumentieren den Problemlösungsprozess;
- können ihren Lösungsweg reflektieren, kommentieren und begründen;
- können Fehler analysieren und die Konsequenzen daraus ziehen.